109-2 電腦概論與程式設計

小考(2)

學號: 姓名:

2021/05/25

- 注意事項
  - 考試期間
  - 上傳答題檔案
  - 其它事項
- 1 Student’s t-distribution (40%)
- 2 卜瓦松累積機率分佈函數 (30%)
- 3 Poisson 極限定理(Poisson Limit Theorem) (30%)
- 4 格式(額外加分) (10%)

注意事項

考試期間

- 遠距考試，沒有人監考，請同學自愛、堂堂正正做人，勿作弊。
- 於課程網站(http://www.hmwu.idv.tw (http://www.hmwu.idv.tw))下載題目卷。
- 可參考課本、上課講義(包含電子檔)及其它資料，但不能與別人討論。
- 可使用計算機、自己的筆記型電腦及平板電腦，不可使用手機。
- 全程可上網查詢，但不能用通訊軟體FB/LINE等討論。
- 程式設計題，若程式碼直接複製(或照抄)講義上的以不給分為原則。
- 有問題者，請舉手發問。勿與同學交談
- 程式直接寫在本Rmd檔。經 `knit` 編譯，產生 `.html` 檔，需印出 `R` 程式碼及執行結果。
- 不按照規定作答者，酌量扣分。
- 程式請隨時存檔，避免突然意外發生，程式檔不見。

上傳答題檔案

- 於教師網站首頁登入[作業考試上傳區]，帳號: `r1092` 。密碼: `xxx` 。
- 選取「正確的」資料夾上傳，若傳錯，請最終要上傳一份正確的的答題檔案。
- 請上傳「 `學號-姓名-R-exam2.Rmd` 」、「 `學號-姓名-R-exam2.html` 」。(學號及姓名，改成自己)
- 若上傳檔案格式錯誤，內容亂碼，空檔等等問題。請自行負責。
- 若要重覆上傳(第2次以上)，請在檔名最後加「 `-2` 」、「 `-3` 」，例如: 「 `學號-姓名-R-exam2-2.Rmd` 」等等。
- 上傳兩次(含)以上 、格式不合等等酌量扣分。
- 如果上傳網站出現「 `You can modify the html file, but please keep the link www.wftpserver.com at least.` 」，請將滑鼠移至「網址列」後，按「Enter」即可。若再不行，請換其它瀏覽器(IE/Edge/Firefox/Chrome)。
- 有問題者，請FB私訊老師。

其它事項

- 若有題目不會寫、或只會寫一半、或結果是有錯的，導致 `knit` 無法編譯產生文件， 則可以「不執行有錯的程式碼」，但必需列印此段程式碼。助教會依照狀況部份給分。
- 有任何問題、意見、建議、甚至抱怨不滿，請直接與老師連絡溝通(FB/Email)。
- 總分: 100分 + 10分。

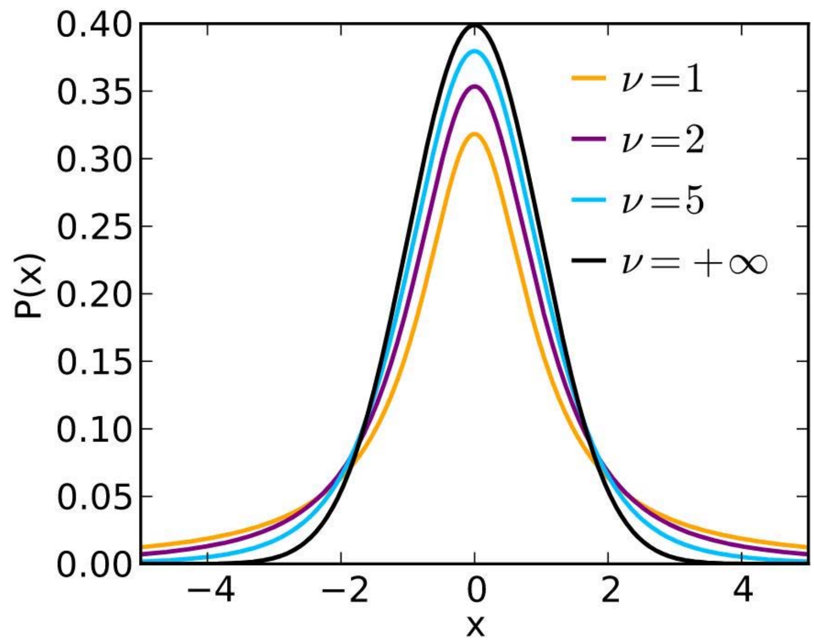
---

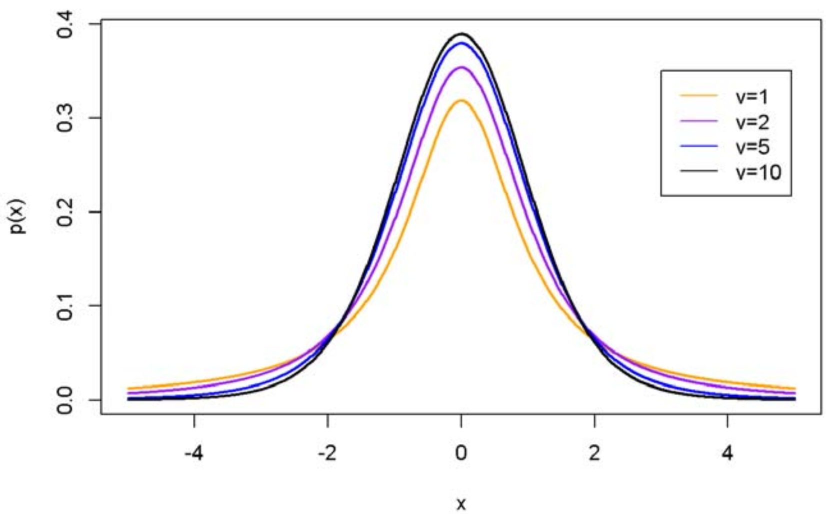
1 Student’s t-distribution (40%)

Student’s t-distribution has the probability density function (pdf) given by

$$p(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

where ν is the number of degrees of freedom and Γ is the gamma function. 試寫一 `R` 函數(命名為 `t_pdf` ，輸入為x、ν，輸出為$p(x)$)， 計算t分配之機率密度函數值，並利用此函數畫出下圖(注意: $x-$, $y-$軸標號、圖例說明(legend)、線條顏色)。 (註: Γ 函數在 `R` 是什麼指令，請自己查。$\nu=+\infty$以$\nu=10$代入。畫圖以R base `graphics` 套件或 `ggplot2` 皆可。) (圖片來源: https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution (https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution))





2 卜瓦松累積機率分佈函數 (30%)

若隨機變數Y服從卜瓦松分配($X \sim Poisson(\lambda)$)，其累積機率分佈函數為:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}。$$

試寫一 R 函數(命名為 `poisson_cdf` ，輸入為x、λ，輸出為$F_X(x)$)， 計算卜瓦松分配之累積機率分佈函數值， 並利用此函數印出下表(印出紅色框部份的表格即可)。

Tables of the Poisson Cumulative Distribution

The table below gives the probability of that a Poisson random variable X with mean = λ is less than or equal to x. That is, the table gives

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!}$$

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

```
##       lambda=2 lambda=2.2 lambda=2.4 lambda=2.6 lambda=2.8 lambda=3 lambda=3.2
## x=0     0.1353     0.1108     0.0907     0.0743     0.0608   0.0498     0.0408
## x=1     0.4060     0.3546     0.3084     0.2674     0.2311   0.1991     0.1712
## x=2     0.6767     0.6227     0.5697     0.5184     0.4695   0.4232     0.3799
## x=3     0.8571     0.8194     0.7787     0.7360     0.6919   0.6472     0.6025
## x=4     0.9473     0.9275     0.9041     0.8774     0.8477   0.8153     0.7806
## x=5     0.9834     0.9751     0.9643     0.9510     0.9349   0.9161     0.8946
## x=6     0.9955     0.9925     0.9884     0.9828     0.9756   0.9665     0.9554
## x=7     0.9989     0.9980     0.9967     0.9947     0.9919   0.9881     0.9832
## x=8     0.9998     0.9995     0.9991     0.9985     0.9976   0.9962     0.9943
## x=9     1.0000     0.9999     0.9998     0.9996     0.9993   0.9989     0.9982
## x=10    1.0000     1.0000     1.0000     0.9999     0.9998   0.9997     0.9995
```

3 Poisson 極限定理(Poisson Limit Theorem) (30%)

給定常數λ，且 $X_n \sim Binomial\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, 則

$$P(X_n = x) = C_x^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad as\ n \to \infty$$

亦即，Poisson分配是二項式分配$Binomial\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$的一個極限分配。

若$n = 30, \lambda = 2.4$，利用 `R` 的內鍵指令(二項式分佈機率質量函數及卜瓦松 分佈機率質量函數), 列出下表(`data.frame`)來驗証Poisson極限定理, 其中最一欄位(`diff`)為兩者差之絕對值。

```
    x binomial.pmf poisson.pmf         diff
1   0       0.0820      0.0907 0.0087517497
2   1       0.2138      0.2177 0.0038982090
3   2       0.2696      0.2613 0.0083375766
4   3       0.2188      0.2090 0.0097959196
5   4       0.1284      0.1254 0.0030235072
6   5       0.0581      0.0602 0.0021224767
7   6       0.0210      0.0241 0.0030372714
8   7       0.0063      0.0083 0.0019823213
9   8       0.0016      0.0025 0.0009083534
10  9       0.0003      0.0007 0.0003270817
11 10       0.0001      0.0002 0.0000976313
```

```
##      x binomial.pmf poisson.pmf   diff
## 1   0       0.0820      0.0907 0.0087
## 2   1       0.2138      0.2177 0.0039
## 3   2       0.2696      0.2613 0.0083
## 4   3       0.2188      0.2090 0.0098
## 5   4       0.1284      0.1254 0.0030
## 6   5       0.0581      0.0602 0.0021
## 7   6       0.0210      0.0241 0.0031
## 8   7       0.0063      0.0083 0.0020
## 9   8       0.0016      0.0025 0.0009
## 10  9       0.0003      0.0007 0.0004
## 11 10       0.0001      0.0002 0.0001
```

4 格式(額外加分) (10%)

有成功編譯出正確的「 `學號-姓名-R-exam1.pdf` 」及「 `學號-姓名-R-exam1.doc` 」，並上傳。 以下數學式是測試MikTeX/LaTeX，請勿刪。這是常態分佈的機率密度函數:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$